

Lineare Algebra I Blatt 7

1 | Verpackungswahn (10 Punkte)

Seien V und W K -Vektorräume, seien $M, N \subseteq V$ und $O \subset W$ Teilmengen, und sei $f: V \rightarrow W$ eine K -lineare Abbildung. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen richtig?

- (a) $\langle\langle M \rangle\rangle = \langle M \rangle$ (c) $\langle f(M) \rangle = f(\langle M \rangle)$
(b) $\langle M \cap N \rangle = \langle M \rangle \cap \langle N \rangle$ (d) $\langle f^{-1}(O) \rangle = f^{-1}(\langle O \rangle)$

2 | Päckchen (10 Punkte)

Welche der folgenden Tupel in \mathbb{R}^3 sind linear unabhängig? Welche sind Erzeugendensysteme? Welche sind Basen? Argumentieren Sie jeweils direkt mit den Definitionen (Def. 5.1), nicht mit den nachfolgenden Sätzen!

- (a) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ (c) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ (e) $(\mathbf{v})_{\mathbf{v} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\}}$
(b) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ (d) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

3 | Auf und Ab

Die *formale Ableitung* eines Polynoms $A = \sum_{i \geq 0} a_i X^i \in \mathbb{R}[X]$ ist gegeben durch $A' := \sum_{i \geq 1} i a_i X^{i-1}$. Die Zuordnung $A \mapsto A'$ definiert auf dem \mathbb{R} -Vektorraum $\mathbb{R}[X]$ einen Endomorphismus. Welchen Kern und welches Bild hat dieser Endomorphismus?

4 | Kreuzschlitz

Sei V ein Vektorraum mit Untervektorräumen W, V_1, V_2 . Ist $W \subseteq V_1 \cup V_2$, so folgt bereits $W \subseteq V_1$ oder $W \subseteq V_2$.